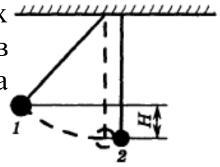
Министерство образования и науки РФ
Совет ректоров вузов Томской области
Открытая региональная межвузовская олимпиада
2013-2014

ФИЗИКА

11 класс

II этап

Вариант 1



1. Два упругих шара одинаковых размеров подвешены на нерастяжимых нитях одинаковой длины (см. рисунок). Массы шаров $\boldsymbol{m_1}$ = 0,25 кг и $\boldsymbol{m_2}$ = 0,15 кг. Отклонив первый шар на высоту $\boldsymbol{H}$ = 20 см, его отпускают. Какой будет скорость первого шара сразу после удара? Ускорение свободного падения принять равным $\boldsymbol{g}$ = 10 м/с.

Решение

1. Найдём скорость v_0 первого шара непосредственно перед ударом. Согласно закону сохранения энергии:

$$m_1 gH = \frac{m_1 v_0^2}{2}, \qquad v_0 = \sqrt{2gH}\ .$$

2. Рассматривая упругий лобовой удар, находим скорости шаров после удара из законов сохранения импульса и энергии:

$$m_1 v_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2, \qquad \frac{m_1 v_0^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}.$$

$$m_1(v_0 - v_1) = m_2 v_2,\ (1) \qquad m_1(v_0^2 - v_1^2) = m_1(v_0 - v_1)(v_0 + v_1) = m_2 v_2^2\ (2)$$

Разделив (2) на (1), получим:

$$v_0 + v_1 = v_2, \qquad \text{или} \qquad v_1 = v_2 - v_0$$

Подставляя v_2 и v_1 в (1), получим:

$$m_1 v_0 - m_1 v_1 = m_2 v_0 + m_2 v_1, \qquad m_1 v_0 - m_1 v_2 + m_1 v_0 = m_2 v_2.$$

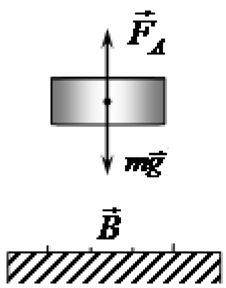
В итоге, скорость равна:

$$\boxed{v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_0 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\sqrt{2gH} = 0{,}25 \cdot 2 = 0{,}5} \text{ м/с}$$

Ответ: 0,5 м/с

2. На сверхпроводящий образец массой *m*, находящийся над постоянным магнитом (индукция магнитного поля *B* = 1 мТл), кладут груз точно такой же массы. Какой должна быть индукция B_1 магнитного поля, чтобы сверхпроводник с грузом «парил» на прежнем расстоянии от магнита? Принять, что ток в сверхпроводнике пропорционален магнитной индукции.

Решение



На образец действуют сила Ампера $\vec{F}_A$ и сила тяжести $m\vec{g}$, см. рис. В начальном состоянии сверхпроводящий образец находится в равновесии. Условие равновесия

$$mg = IBl, \qquad (1)$$

где *l* – длина образца, *m* – масса образца, *I* – ток в сверхпроводнике.

По условию задачи $I \sim B$. Следовательно,

$$F_A \sim IB \sim B^2.$$

Поэтому при равновесии

$$mg = F_A \sim B^2. \qquad (2)$$

Тогда при грузе на образце с удвоенной массой

$$2mg \sim B_1^2. \qquad (3)$$

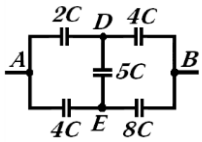
Сопоставляя уравнения (2) и (3), получим отношение

$$\frac{B_1^2}{B^2} = 2\,. \qquad (4)$$

Отсюда $$B_1 = \sqrt{2}B = 1{,}41 \text{ мТл}\,.$$

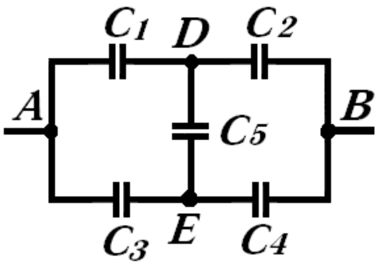
Ответ: $B_1 = \sqrt{2}B = 1{,}4$ мТл.

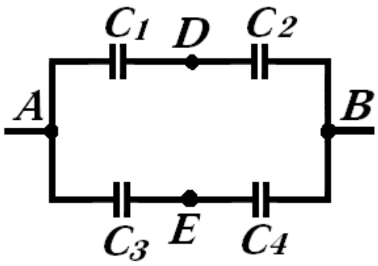
3. На рисунке приведена схема соединения конденсаторов. Определите общую емкость этой батареи конденсаторов.



Решение

Заметим, что емкости конденсаторов нижней ветви вдвое больше соответствующих емкостей верхней ветви. Докажем, что при выполнении условия: $\dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{C_3}{C_4}$ (см. рисунок) потенциалы точек D и E одинаковы, и можно изъять конденсатор-«перемычку» C_5.





Распределение напряжений в верхней и нижней ветвях цепи описывается уравнениями:

$$q_1 = q_2,\ \frac{U_1}{U_2} = \frac{C_2}{C_1}, \qquad q_3 = q_4,\ \frac{U_3}{U_4} = \frac{C_4}{C_3}.$$

Значит, $\dfrac{U_1}{U_2} = \dfrac{U_3}{U_4}$.

Поскольку, $U_1 + U_2 = U_3 + U_4 = U_{AB}$, $U_1\left(1 + \dfrac{U_2}{U_1}\right) = U_3\left(1 + \dfrac{U_4}{U_3}\right)$, получаем $U_1 = U_3$. А эти напряжения не что иное, как разности потенциалов: $U_1 = \varphi_D - \varphi_A$, $U_2 = \varphi_E - \varphi_A$. Таким образом, $\varphi_D = \varphi_E$ и поэтому включение конденсатора-«перемычки» между точками D и E ничего не изменит: заряжаться он не будет, а значит, его можно изъять из цепи.

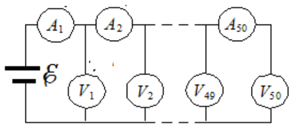
Тогда, расчёт C_0:

$$C_{12} = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2} = \frac{2C \cdot 4C}{2C + 4C} = \frac{8C^2}{6C} = \frac{4C}{3}, \qquad C_{34} = \frac{C_3C_4}{C_3 + C_4} = \frac{4C \cdot 8C}{4C + 8C} = \frac{32C^2}{12C} = \frac{8C}{3}$$

$$C_0 = C_{12} + C_{34} = \frac{4C}{3} + \frac{8C}{3} = 4C\,.$$

Ответ: $\boxed{C_0 = 4C}$.

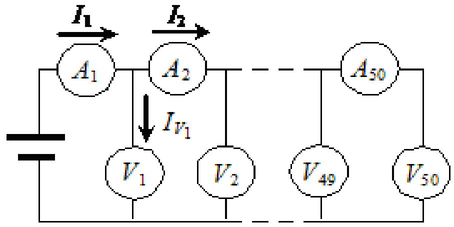
4. Схема, приведенная на рисунке, содержит 50 разных амперметров и 50 одинаковых вольтметров сопротивлением R. Показания первого вольтметра $U_{V_1} = 9{,}6$ В, первого амперметра $I_1 = 9{,}5$ мА, второго амперметра $I_2 = 9{,}2$ мА. Определите по этим данным сумму показаний всех вольтметров.



Решение

Укажем токи, протекающие в цепи, необходимые для решения задачи (см. рис.). По первому закону Кирхгофа (закону сохранения заряда)

$$I_1 = I_{V_1} + I_2, \qquad (1)$$



где I_1 – ток, протекающий через амперметр A_1, I_{V_1} – ток, протекающий через V_1, I_2 – ток, протекающий через амперметр A_2. Из уравнения (1) ток через вольтметр V_1

$$I_{V_1} = I_1 - I_2 = 0{,}3 \text{ мА}. \qquad (2)$$

Тогда сопротивление вольтметра V_1 и следовательно, каждого из остальных 49 вольтметров

$$R = U_{V_1}/I_{V_1} = 3{,}2 \cdot 10^4 \text{ Ом}.$$

Сумма напряжений, показываемых всеми вольтметрами,

$$\sum_{i=1}^{50} U_{Vi} = \sum_{i=1}^{50} I_{Vi} R = R \sum_{i=1}^{50} I_{Vi}. \qquad (3)$$

Сумма токов $\sum_{i=1}^{50} I_{Vi}$, протекающая через все 50 вольтметров равна току I_1, протекающему через первый амперметр A_1, то есть

$$\sum_{i=1}^{50} I_{Vi} = I_1. \qquad (4)$$

Подставив (4) в (3), найдем сумму показаний всех вольтметров

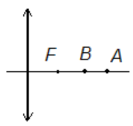
$$\sum_{i=1}^{50} U_{V_i} = R \sum_{i=1}^{50} I_{V_i} = RI_1 = U_{V_1} \cdot \frac{I_1}{I_1 - I_2}.$$

Подставляя числовые значения, получим

$$\sum_{i=1}^{50} U_{V_i} = 9{,}6 \cdot \frac{9{,}5}{9{,}5 - 9{,}2} = 304 \text{ В}.$$

Ответ: 304 В

5. Для предмета, находящегося в точке А, линза дает увеличение Γ_1=2, а когда его помещают в точку В, увеличение Γ_2=3. Каким будет увеличение для предмета, помешенного в середину отрезка АВ?



Решение

Пусть F – фокусное расстояние линзы, A – расстояние до точки А, B – расстояние до точки В, f_1 – расстояние до изображения предмета, находящегося в точке А, f_2 – расстояние до изображения предмета, находящегося в точке В, f – расстояние до изображения предмета, находящегося в середине отрезка АВ ($F = \dfrac{A+B}{2}$).

Воспользуемся формулой тонкой линзы: $\dfrac{1}{F} = \dfrac{1}{d} + \dfrac{1}{f}$, тогда для предметов, находящихся в точках А и В, соответственно:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{A} + \frac{1}{f_1}, \qquad \frac{1}{F} = \frac{1}{B} + \frac{1}{f_2} \qquad (1).$$

Соответственно увеличение будут:

$\Gamma_1 = \frac{f_1}{A}$ для предмета, находящегося в точке A и $\Gamma_2 = \frac{f_2}{B}$ для предмета, находящегося в точке B, $\Gamma = \frac{f}{(A+B)/2} = \frac{2f}{A+B}$ для предмета, находящегося в середине отрезка AB. Тогда:

$$f_1 = \Gamma_1 A, \quad f_2 = \Gamma_2 B, \quad f = \frac{\Gamma}{2}(A+B) \qquad (2).$$

Из (1) и (2) получим

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{A} + \frac{1}{A\Gamma_1} = \frac{1}{B} + \frac{1}{B\Gamma_2} = \frac{2}{A+B} + \frac{2}{\Gamma(A+B)} \qquad (3).$$

Из (3) получим

$$\Gamma_1 = \frac{F}{A-F}, \; \Gamma_2 = \frac{F}{B-F}, \; \Gamma = \frac{F}{(A+B)/2 - F} \qquad (4)$$

Из первых двух выражений (4) получаем:

$A = \frac{F}{\Gamma_1}(1+\Gamma_1)$ и $B = \frac{F}{\Gamma_2}(1+\Gamma_2)$.

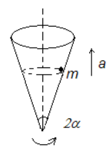
Подставляем полученные A и B в третье выражение (4):

$$\Gamma = \frac{F}{\frac{F}{2\Gamma_1}(1+\Gamma_1) + \frac{F}{2\Gamma_2}(1+\Gamma_2) - F} = \frac{1}{\frac{1+\Gamma_1}{2\Gamma_1} + \frac{1+\Gamma_2}{2\Gamma_2} - 1} = \frac{2\Gamma_1\Gamma_2}{(1+\Gamma_1)\Gamma_2 + (1+\Gamma_2)\Gamma_1 - 2\Gamma_1\Gamma_2} = \frac{2\Gamma_1\Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2} =$$

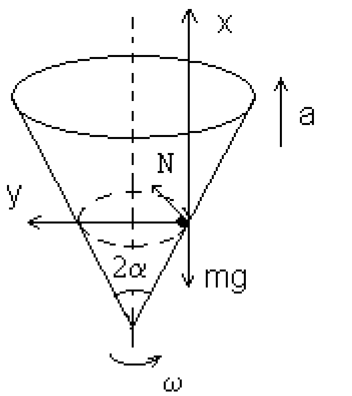
$$= \frac{2 \cdot 2 \cdot 3}{2+3} = 2{,}4$$

Ответ: 2,4

6. Определите период движения шарика, вращающегося по окружности радиуса R внутри конической поверхности, движущейся с ускорением a. Угол при вершине конуса равен 2α.



Решение



Направим оси x и y как показано на рисунке. На шарик действуют силы: тяжести и реакции со стороны конуса. Вдоль оси y шарик движется вместе с конусом с ускорением *a*. В плоскости, перпендикулярной оси x, шарик движется по окружности с угловой скоростью *w* и центростремительным ускорением $a_ц$.
Запишем второй закон Ньютона для движения по осям x и y:

По оси x: $N\cos\alpha = ma_ц = mw^2R$

По оси y: $N\sin\alpha - mg = ma$

или

$$N\sin\alpha = ma + mg \qquad (1)$$

$$N\cos\alpha = mw^2R \qquad (2)$$

Разделим (1) на (2)

$$tg\alpha = \frac{mg + ma}{mw^2R}$$

$$w^2Rtg\alpha = g + a$$

$$w^2 = \frac{g+a}{Rtg\alpha} = \frac{4\pi^2}{T^2}$$, где T – период вращения шарика.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{Rtg\alpha}{g+a}}$$

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\frac{Rtg\alpha}{g+a}}$

7. В цилиндрическом сосуде с площадью основания 14 см^2 находится кубик льда массой 14 г при температуре (-14°С). Какое минимальное количество теплоты нужно сообщить льду для того, чтобы при дальнейшем нагревании уровень воды в сосуде не менялся? Удельная теплоемкость льда 2,1 Дж/г·К, его удельная теплота плавления 330Дж/г, а плотность – 0,9 г/см^3. Форма льда при плавлении сохраняется.

Решение

Уровень воды будет подниматься до момента всплытия кубика. Потом, до полного таяния льда, уровень воды будет на одном и том же расстоянии h от дна сосуда, которое определяется объемом воды, образовавшейся из всего растаявшего льда:

$$h = \frac{m_{льда}}{S\rho_{\text{воды}}}$$

Лед всплывет, когда глубина подводной части кубика станет равной h. Пусть в момент всплывания ребро кубика равно *a*, тогда его объем будет a^3 и из условия плавания ($m_{льда}g = \rho_{льда}a^3g = m_{вытесн.воды}g = \rho_{воды}ga^2h$) получим: $a = \frac{\rho_в h}{\rho_л} = \frac{m_л}{S\rho_л}$. Тогда масса кубика при всплытии $m_{л1} = \rho_л a^3 = \frac{m_л^3}{\rho_л^2 S^3}$. То есть для всплывания кубика необходимо растопить массу льда

$$M = m_л - m_{л1} = m_л - \frac{m_л^3}{\rho_л^2 S^3}$$

Тогда необходимое количество теплоты:

$$Q = m_л c\Delta t + \lambda_л (m_л - \frac{m_л^3}{\rho_k^2 S^3}) \approx 4624 Дж$$

Ответ: 4624 Дж

8. Пуля массой m = 10 г, летевшая с начальной скоростью υ = 400 м/с, пробивает один подвешенный груз массой m_1 = 10 г и застревает во втором подвешенном грузе такой же массы. Пренебрегая временем взаимодействия пули с грузом и потерей энергии пули в пространстве между грузами, найдите количество теплоты Q, выделившееся в первом грузе, если во втором выделилось Q_1 = 100 Дж.

Решение

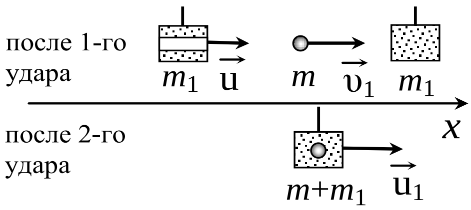


Рис. 1

Рассматривая систему как замкнутую, на основании закона сохранения импульса в проекциях на ось x (массы грузов одинаковы: $m_1 = m_2 = m$) запишем:

после первого удара (рис. 1)

$$m\upsilon = m\upsilon_1 + mu, \qquad (1)$$

где υ и υ_1 – проекции скорости пули на ось x до и после первого удара, u – проекция скорости первого груза на ось x после первого удара;

после второго удара

$$m\upsilon_1 = 2mu_1, \qquad (2)$$

где u_1 – проекция скорости второго груза на ось x после второго удара.

Из уравнений (1) и (2) получим

$$\upsilon = \upsilon_1 + u, \qquad (3)$$

$$u_1 = \upsilon_1/2. \qquad (4)$$

В соответствии с законом сохранения энергии имеем:

после первого удара $$\frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{m\upsilon_1^2}{2} + \frac{mu^2}{2} + Q, \qquad (5)$$

где Q – количество теплоты, выделившееся в первом грузе;

после второго удара $$\frac{m\upsilon_1^2}{2} = 2\frac{mu_1^2}{2} + Q_1, \qquad (6)$$

где Q_1 – количество теплоты, выделившееся во втором грузе.

Выразив из уравнения (3) $u = \upsilon - \upsilon_1$ и подставив в (5), найдем количество теплоты, выделившейся в первом грузе:

$$Q = \frac{m\upsilon^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2} - \frac{mu^2}{2} = \frac{m\upsilon^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2} - \frac{m(\upsilon - \upsilon_1)^2}{2}.$$

Из предыдущего соотношения следует:

$$2Q/m = \upsilon^2 - \upsilon_1^2 - (\upsilon - \upsilon_1)^2 = 2\upsilon\upsilon_1 - 2\upsilon_1^2. \qquad (7)$$

Для решения уравнения (7) относительно Q необходимо выразить скорость υ_1 пули после первого удара через условия задачи. С этой целью подставим (4) в (6):

$$\frac{m\upsilon_1^2}{2} = \frac{m\upsilon_1^2}{4} + Q_1, \qquad (8)$$

и из уравнения (8) получим выражение для квадрата скорости пули после первого удара:

$$\upsilon_1^2 = \frac{4Q_1}{m}. \qquad (9)$$

Решая систему уравнений (7), (9) относительно Q, найдем:

$$Q = 2m\upsilon\sqrt{Q_1/m} - 4Q_1 = 400 \text{ (Дж)}.$$

Ответ: 400 Дж

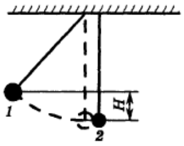
Министерство образования и науки РФ
Совет ректоров вузов Томской области
Открытая региональная межвузовская олимпиада
2013-2014

ФИЗИКА

11 класс

II этап

Вариант 2



1. Два упругих шара одинаковых размеров подвешены на нерастяжимых нитях одинаковой длины (см. рисунок). Массы шаров $\boldsymbol{m_1}$ = 0,25 кг и $\boldsymbol{m_2}$ = 0,15 кг. Отклонив первый шар на высоту $\boldsymbol{H}$ = 20 см, его отпускают. На какую высоту поднимется первый шар после удара? Ускорение свободного падения принять равным $\boldsymbol{g}$ = 10 м/с.

Решение

1. Найдём скорость v_0 первого шара непосредственно перед ударом. Согласно закону сохранения энергии:

$$m_1 gH = \frac{m_1 v_0^2}{2}, \qquad v_0 = \sqrt{2gH}\,.$$

2. Рассматривая упругий лобовой удар, находим скорости шаров после удара из законов сохранения импульса и энергии:

$$m_1 v_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2, \qquad \frac{m_1 v_0^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}.$$

$$m_1(v_0 - v_1) = m_2 v_2, \ (1) \qquad m_1(v_0^2 - v_1^2) = m_1(v_0 - v_1)(v_0 + v_1) = m_2 v_2^2 \ (2)$$

Разделив (2) на (1), получим:

$$v_0 + v_1 = v_2, \qquad \text{или} \qquad v_1 = v_2 - v_0$$

Подставляя v_2 и v_1 в (1), получим:

$$m_1 v_0 - m_1 v_1 = m_2 v_0 + m_2 v_1, \qquad m_1 v_0 - m_1 v_2 + m_1 v_0 = m_2 v_2.$$

В итоге, скорости равны:

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_0 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\sqrt{2gH} \qquad v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_0 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\sqrt{2gH}$$

3. Высота подъема каждого из шаров определяется также из закона сохранения энергии:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = m_1 g h_1, \qquad \frac{m_2 v_2^2}{2} = m_2 g h_2.$$

$$h_1 = \frac{v_1^2}{2g}, \qquad h_2 = \frac{v_2^2}{2g}.$$

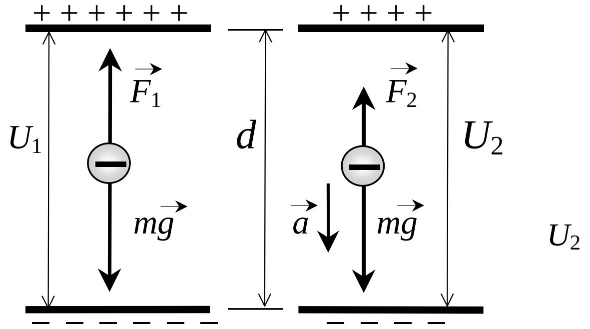
$$\boxed{h_1 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 H = 0{,}0125\,м = 1{,}25\,см},$$

Ответ: 1,25 см

2. В плоском конденсаторе, расположенном горизонтально и находящемся в вакууме, взвешена заряженная капелька ртути на равном расстоянии от пластин конденсатора. Расстояние между пластинами конденсатора d = 2 см. К конденсатору приложена разность потенциалов U_1 = 500 В. Внезапно, разность потенциалов падает до U_2 = 490 В и равновесие капельки нарушается. Определить время t, в течение которого капелька достигнет нижней пластины конденсатора.

Решение

На рисунке показаны силы, действующие на капельку когда к конденсатору приложена разность потенциалов U_1 (капелька находится в равновесии, рис. 1а) и при разности потенциалов (капелька падает с ускорением a, рис. 1б).



а) б)

Рис. 1

Следовательно,

$$\frac{d}{2} = \frac{at^2}{2}. \qquad (1)$$

Тогда время падения капельки (при разности потенциалов U_2):

$$t = \sqrt{d/a}. \qquad (2)$$

По второму закону Ньютона (рис. 1б):

$$m\vec{g} + \vec{F}_2 = m\vec{a} \text{ или } mg - F_2 = ma \text{, откуда } a = g - \frac{qU_2}{md}. \qquad (3)$$

Величина электрических сил, действующих на капельку до и после нарушения равновесия,

$$F_1 = qE_1 = \frac{qU_1}{d}; \quad F_2 = qE_2 = \frac{qU_2}{d}. \qquad (4)$$

Массу капельки определим из условия равновесия (рис. 1а):

$$m\vec{g} + \vec{F}_1 = 0 \text{ или } mg - F_1 = 0 \text{, откуда } m = \frac{qU_1}{gd}. \qquad (5)$$

Решая систему уравнений (2) – (5) относительно t, найдем

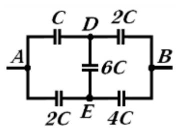
$$t = \sqrt{\frac{U_1 d}{g\left(U_1 - U_2\right)}} \approx 0{,}32 \text{ с.}.$$

Подставляя числовые значения, получим

$$t = \sqrt{\frac{490 \cdot 0{,}02}{9{,}8 \cdot (500 - 490)}} = 0{,}316 \text{ с} \approx 0{,}32 \text{ с.}.$$

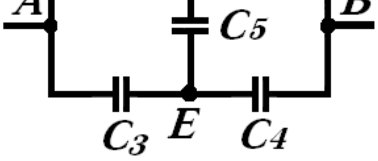
Ответ: 0,32 с.

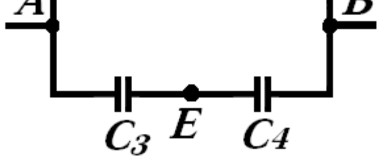
3. На рисунке приведена схема соединения конденсаторов. Определите общую емкость этой батареи конденсаторов.



Решение

Заметим, что емкости конденсаторов нижней ветви вдвое больше соответствующих емкостей верхней ветви. Докажем, что при выполнении условия: $\frac{C_1}{C_2} = \frac{C_3}{C_4}$ (см. рисунок) потенциалы точек D и E одинаковы, и можно изъять конденсатор-«перемычку» C_5.





Распределение напряжений в верхней и нижней ветвях цепи описывается уравнениями:

$$q_1 = q_2,\ \frac{U_1}{U_2} = \frac{C_2}{C_1}, \qquad q_3 = q_4,\ \frac{U_3}{U_4} = \frac{C_4}{C_3}.$$

Значит, $\frac{U_1}{U_2} = \frac{U_3}{U_4}$.

Поскольку, $U_1 + U_2 = U_3 + U_4 = U_{AB}$, $U_1\left(1 + \frac{U_2}{U_1}\right) = U_3\left(1 + \frac{U_4}{U_3}\right)$, получаем $U_1 = U_3$. А эти напряжения не что иное, как разности потенциалов: $U_1 = \varphi_D - \varphi_A$, $U_2 = \varphi_E - \varphi_A$. Таким образом, $\varphi_D = \varphi_E$ и поэтому включение конденсатора-«перемычки» между точками D и E ничего не изменит: заряжаться он не будет, а значит, его можно изъять из цепи.

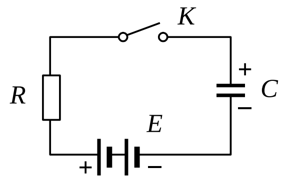
Тогда, расчёт C_0:

$$C_{12} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{C \cdot 2C}{C + 2C} = \frac{2C^2}{3C} = \frac{2C}{3}, \qquad C_{34} = \frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4} = \frac{2C \cdot 4C}{2C + 4C} = \frac{8C^2}{6C} = \frac{4C}{3}$$

$$C_0 = C_{12} + C_{34} = \frac{2C}{3} + \frac{4C}{3} = 2C.$$

Ответ: $\boxed{C_0 = 2C}$.

4. Конденсатор заряжают до разности потенциалов 100 В и подключают через резистор R к батарее с ЭДС 300 В и пренебрежимо малым внутренним сопротивлением источника тока. Какое количество теплоты Q выделится в резисторе за время полной зарядки конденсатора емкостью C = 100 мкФ?



Решение

Конденсатор за время полной зарядки зарядится до напряжения, равного ЭДС Е источника тока. По закону сохранения энергии

$$A = W_2 - W_1 + Q, \tag{1}$$

где A – работа источника тока, W_1 – энергия конденсатора, заряженного до напряжения U, W_2 – энергия конденсатора, заряженного до напряжения, равного ЭДС Е источника тока, Q – количество теплоты, которое выделится в резисторе за время полной зарядки конденсатора

Величины заряда q_0 конденсатора при разомкнутом ключе K и q после полной зарядки конденсатора соответственно равны:

$$q_0 = CU; \quad q = C\text{Е}. \tag{2}$$

Работа, которую совершает источник тока при зарядке конденсатора,

$$A = \text{Е}(q - q_0). \tag{3}$$

Энергия заряженного конденсатора определяется формулой

$$W_2 = q^2/(2C) = C\text{Е}^2/2. \tag{4}$$

Используя уравнения (2) – (4), представим (1) в виде

$$\text{Е}\left(q - q_0\right) = \frac{C\text{Е}^2}{2} - \frac{CU^2}{2} + Q. \tag{5}$$

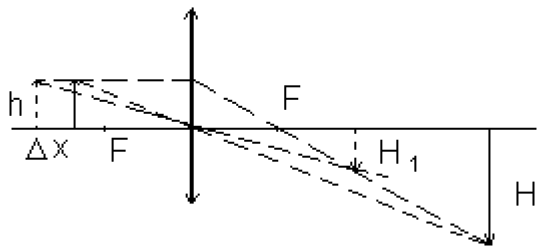
Решая систему уравнений (2), (5) относительно Q, найдем

$$Q = \text{Е}C\left(\text{Е} - U\right) - \frac{C\text{Е}^2}{2} + \frac{CU^2}{2} = \frac{C\left(\text{Е} - U\right)^2}{2} = 2\ (\text{Дж}).$$

Ответ: 2 Дж

5. От предмета высотой 20 см при помощи линзы получили действительное изображение высотой 80 см. Когда предмет отодвинули на 5 см, то получили действительное изображение высотой 40 см. Найти фокусное расстояние и оптическую силу линзы.

Решение



Пусть F – фокусное расстояние линзы, h – высота предмета, H – размер исходного изображения, H_1 – размер изображения после перемещения предмета, Δx – расстояние, на которое передвинули предмет, d, f – расстояние предмета и изображения в первоначальном положении

Формула тонкой линзы для исходного положения: $\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}$. (1)

Увеличение: $\Gamma = \frac{f}{d} = \frac{H}{h}$ (2)

Из (2) $f = \frac{Hd}{h}$. Подставим в (1) и получим

$$F = \frac{Hd}{H+h}. \quad (3)$$

После перемещения расстояние до предмета станет: $d_1 = d + \Delta x$. Тогда $f_1 = \frac{H_1 d_1}{h} = \frac{H_1(d+\Delta x)}{h}$ и $\frac{1}{F} = \frac{H_1 + h}{H_1(d+\Delta x)}$, тогда

$$F = \frac{H_1(d+\Delta x)}{H_1 + h} \quad (4)$$

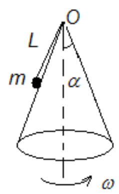
Приравняв (3) и (4) и сделав необходимые преобразования, получим

$$d = \frac{H_1 \Delta x (H+h)}{h(H-H_1)} = 0{,}25\textit{м}$$

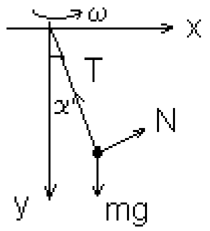
Подставим в (3) и получим $F=0.2$ *м*, а оптическая сила $D = \frac{1}{F} = 5\textit{м}^{-1} = 5\textit{дптр}$

Ответ: 0,2 м, 5 дптр

6. К вершине конуса прикреплен легкий тонкий стержень длиной L, который может свободно вращаться в вертикальной плоскости относительно точки O. На другом конце стержня закреплен маленький гладкий шарик массой m. Конус начинают медленно раскручивать вокруг его вертикальной оси. Найти зависимость величины силы натяжения стержня от угловой скорости ω вращения конуса, если при ω=0 стержень образует с вертикалью угол α.



Решение



В начальный момент вращения, когда шарик лежит на поверхности конуса, на шарик действуют: сила тяжести, сила реакции со стороны конуса и сила натяжения T, направленная по оси стержня. При этом шарик движется в горизонтальной плоскости по окружности радиуса $r = L\cdot\sin\alpha$. Поскольку скорость вращения конуса меняется медленно, то деформацией стержня можно пренебречь. Направим оси как показано на рисунке. Тогда

по оси x: $$-m\omega^2 r = -m\omega^2 L\sin\alpha = -T\sin\alpha + N\cos\alpha \qquad (1)$$

по оси y: $$0 = mg - T\cos\alpha - N\sin\alpha \qquad (2)$$

или:

$$T = m(g\cos\alpha + \omega^2 L\sin^2\alpha) \qquad (3)$$

$$N = m(g - \omega^2 L\cos\alpha)\sin\alpha \qquad (4)$$

Сила реакции в (4) не может быть отрицательной величиной, поэтому при

$\omega \geq \omega_{\max} = \sqrt{\dfrac{g}{L\cos\alpha}}$ сила N становится равной 0, что соответствует отрыву шарика от поверхности конуса и шарик начинает отклоняться от вертикальной оси, т.е. угол между стержнем и вертикалью становится равен β > α. А выражение (1) преобразуется к виду:

$$T\sin\beta = m\omega^2 L\sin\beta \qquad (5)$$

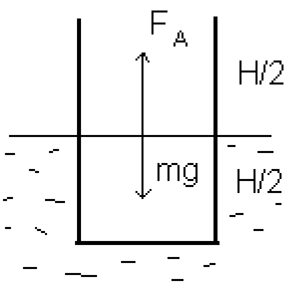
В итоге получаем:

$$T = m(g\cos\alpha + \omega^2 L\sin^2\alpha) \text{ при } \omega \leq \omega_{\max}$$

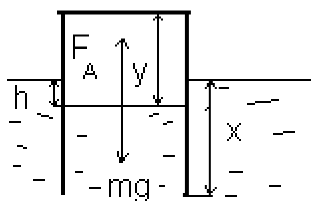
$$T = \omega^2 L \quad \text{при } \omega \geq \omega_{\max}$$

7. На поверхности воды плавает цилиндрический тонкостенный стакан, наполовину погруженный в жидкость. На сколько погрузится нижняя кромка стакана, если его поставить на поверхность воды вверх дном? Высота стакана – 15 см, давление воздуха – 1 атм.

Решение



а



б

Сначала стакан находится в положении (а), затем – в положении (б). В обоих случаях на него действуют две силы: сила тяжести и сила Архимеда. Из рисунка (б):

$$h = (x + y) - H \qquad (1)$$

Стакан будет плавать, если $F_A + mg = 0$, тогда

для случая (а): $\rho g S\dfrac{H}{2} = mg$ (2)

для случая (б): $\rho g S h = mg$, (3)

где S – площадь дна стакана, m – его масса, ρ – плотность воды.

Приравнивая (2) и (3) получим: $h = \frac{H}{2}$. Подставим в (1):

$$\frac{H}{2} = (x+y) - H \Rightarrow (x+y) = \frac{3}{2}H \qquad (4)$$

Теперь воспользуемся законом Бойля-Мариотта ($pV = const$):

$$p_а V_а = p_б V_б$$

т.к. $p_а = p_0$, $p_б = p_0 + \rho g h$, то

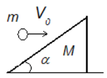
$$p_0 HS = (p_0 + \rho g h) yS \qquad (5)$$

Выразив y из (4) и подставив в (5), получаем:

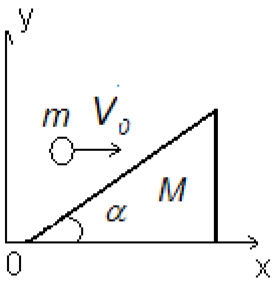
$$x = \frac{p_0 H + \frac{3}{2}\rho g H^2}{2p_0 + \rho g H} = 0{,}154\text{м}$$

Ответ: 0,154 м = 15,4 см

8. Шар массой m, летящий горизонтально, ударяется о гладкую наклонную поверхность клина массой M и углом при основании α. Клин покоится на гладкой горизонтальной поверхности массивной плиты. В результате упругого удара клин начинает двигаться по плите. Найдите отношение M/m, если после отскока шар попадает в ту же точку на клине, от которой отскочил.



Решение



Выберем оси координат как показано на рисунке. Пусть начальная скорость шара – v_0. Чтобы шар после удара смог попасть в ту же точку на клине горизонтальные составляющие скоростей шара и клина после удара должны быть равны. Запишем закон сохранения импульса по оси х:

$$mv_0 = (m+M)v_x \qquad (1)$$

Т.к. трения нет, справедлив и закон сохранения энергии в виде:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{(m+M)v_x^2}{2} + \frac{mv_y^2}{2} \qquad (2),$$

гдеv_y – составляющая скорости шарика по оси y.

Пусть за время удара (Δt) шарика о клин между ними действует сила, среднее значение которой – F. В отсутствие трения сила F направлена перпендикулярно поверхности клина. Тогда:

по оси x: $Mv_x = F\Delta t \sin\alpha$

по оси y: $mv_y = F\Delta t \cos\alpha$.

Поделим последние выражения друг на друга, получим:

$$v_y = \frac{M\cos\alpha}{m\sin\alpha} v_x \qquad (3)$$

Подставим (3) в (2)

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{(m+M)v_x^2}{2} + \frac{mM^2\cos^2\alpha}{2m^2\sin^2\alpha}v_x^2$$

Откуда $$m^2v_0^2 = \frac{m^2\sin^2\alpha + mM\sin^2\alpha + M^2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}v_x^2 \qquad (4).$$

Поделим (4) на возведенное в квадрат (1):

$$1 = \frac{m^2\sin^2\alpha + mM\sin^2\alpha + M^2\cos^2\alpha}{(m+M)^2\sin^2\alpha}.$$

Сделав необходимые преобразования, получим:

$$\frac{M}{m} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$$

Ответ: $\frac{M}{m} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$